EXERCICE 2

BACCALAUREAT S ANNEE 2001

AMERIQUE DU NORD

Thème : les complexes

On considère le polynôme défini par :

```
maxima] P(z):=z^4-6*z^3+24*z^2-18*z+63;
```

(D1) $P(z) := z^4 - 6\,z^3 + 24\,z^2 + (-18)\,z + 63$

```
(C2) 'P(%i*sqrt(3))=P(%i*sqrt(3));
```

(D5) $P\left(\sqrt{3}\,i\right) = 0$

```
(C6) 'P(-%i*sqrt(3))=P(-%i*sqrt(3));
```

(D6) $P\left(-\sqrt{3}\,i\right) = 0$

```
(C7) factor(P(z));
```

(D7) $\left(z^2+3\right)\left(z^2-6\,z+21\right)$

On a donc bien montré l'existence d'un polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que pour tout z de $\mathbb{C}$ on ait :

$$P(z) = (z^2+3)\,Q(z)$$

Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont :

```
maxima] solve(P(z)=0,z);
```

(D3) $\left[z = 3 - 2\sqrt{3}\,i, z = 2\sqrt{3}\,i + 3, z = -\sqrt{3}\,i, z = \sqrt{3}\,i\right]$

On montre ensuite que les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont sur un même cercle. Pour cela, on définit A, B, C et D comme les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$. Ensuite, on calcule l'affixe du milieu de [CD], puis on montre que l'égalité des longueurs :

$$\mathrm{IA} = \mathrm{IB} = \mathrm{IC} = \mathrm{ID}$$

ce qui prouve bien le résultat cherché.

```
maxima] zA:rhs(part(D3,4));
```

(D4) $\sqrt{3}\,i$

```
(C5) zB:rhs(part(D3,3));
```

(D5) $-\sqrt{3}\,i$

```
(C6) zC:rhs(part(D3,2));
```

(D6) $2\sqrt{3}\,i+3$

(C7) `zD:rhs(part(D3,1));`

(D7) $3-2\sqrt{3}\,i$

(C8) `zI:(zC+zD)/2;`

(D8) 3

(C9) `'IA=abs(zA-zI);`

(D9) $\mathrm{IA}=2\sqrt{3}$

(C10) `'IB=abs(zB-zI);`

(D10) $\mathrm{IB}=2\sqrt{3}$

(C11) `'IC=abs(zC-zI);`

(D11) $\mathrm{IC}=2\sqrt{3}$

(C12) `'ID=abs(zC-zI);`

(D12) $\mathrm{ID}=2\sqrt{3}$

`Soit E l'image de D par la rotation de centre O et d'angle pi`

(C13) `zE:exp(%I*%Pi)*zD;`

(D13) $2\sqrt{3}\,i-3$

`On calcule alors :`

(C14) `(zC-zB)/(zE-zB);`

(D14) $\dfrac{3\sqrt{3}\,i+3}{3\sqrt{3}\,i-3}$

(C23) `rectform(D14);`

(D25) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}$

(C26) `polarform((zC-zB)/(zE-zB));`

(D26) $e^{-i\arctan\sqrt{3}}$

(C27) `tan(-%pi/3);`

(D27) $-\sqrt{3}$

En conclusion, le rapport $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BE}}$ est égal au module de $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ est égal à 1, et l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{BE}},\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$ est égal à l'argument de ce même complexe, c'est à dira à $-\frac{\pi}{3}$. On a donc prouvé que le triangle BEC est équilatéral.